Soluciones de alguno de los ejercicios adicionales.

3. Se sabe que la cantidad de miligramos de Clorhidrato de etilefrina contenidos en una cápsula de cierta medicina, que regula la tensión arterial, es una variable aleatoria con desviación típica 0.5 mg. Si la concentración media de la citada sustancia supera los 31 mg. por cápsula, la toxicidad alcanzada en el cuerpo humano es muy peligrosa.

   Se observan cuatro cápsulas de dicha medicina que proporcionan una media de 27 mg. A un nivel de confianza de al menos el 99%, ¿es seguro tomar la medicina?

   La muestra tomada es muy pequeña, $n = 4$, y no nos dicen que pueda suponerse normalidad. Conocemos, además, la desviación típica $\sigma = 0.5$ mg. Por lo tanto, debemos utilizar la desigualdad de Tchebychev.

$$P\left(|\bar{X} - \mu| < k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \geq \underbrace{1 - \frac{1}{k^2}}_{=0.99}$$

   De la igualdad $1 - \frac{1}{k^2} = 0.99$ sacamos que $k = 10$ y el intervalo de confianza para μ al 99% de confianza será

$$\left(\bar{X} - k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} - k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

   que es igual a

$$(27 \pm 10\frac{0.5}{\sqrt{4}}) = (24.5, 29.5)$$

   Este intervalo no contiene 31 mg como valor posible y se encuentra situado a la derecha de dicho punto. Por lo tanto, a la vista de la poca información que tenemos, podemos asegurar que sí es seguro tomar la medicina con ese nivel de confianza. En este caso hay que observar que la información disponible es muy poca, una muestra de tan sólo 4 elementos.

6. El taller Hermanos Gómez está siendo inspeccionado para saber si la media del tiempo empleado en hacer una puesta a punto, es superior al promedio, establecido en 0.7 horas. Una muestra de este tiempo (en horas) para 10 coches ha ofrecido los siguientes resultados:

$$0.8, 0.5, 0.4, 1.2, 0.9, 1.1, 0.7, 1, 0.6, 0.9$$

   Bajo la hipótesis de normalidad y un nivel de confianza del 95%, ¿podría decirse que este taller cobra un precio excesivo a sus clientes por poner a punto sus vehículos?

   Tenemos que ver si cobran un precio excesivo por las reparaciones, es decir, si el tiempo que emplean es superior o no al promedio establecido que es de 0.7 horas. Por ello realizamos al contraste:

$$\left.\begin{array}{lcl} H_0: & \mu & = & 0.7 \\ H_1: & \mu & > & 0.7 \end{array}\right\}$$

Sabemos que

$$d = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

Hacemos algunos cálculos,

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = 0.81 \quad s^2 = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1} = 0.0677 \Rightarrow s = 0.26$$

con lo que,

$$\hat{d} = \frac{0.81 - 0.7}{0.26/\sqrt{10}} = 1.336$$

En el enunciado nos dicen que usemos una confianza del 95%, por lo que $\alpha = 0.05$. Como el contraste es unilateral, buscamos en las tablas el punto $t_{9,0.05} = 1.833$. Como 1.336 es menor que 1.833 no existe evidencia suficiente para rechazar H_0.

7. Dos muestras de dos poblaciones normales han dado los siguientes resultados: $n_1 = 8, \sum x_i^2 = 46, \sum x_i = 12, n_2 = 11, \sum y_i^2 = 80, \sum y_i = 22$. Contrastar la hipótesis: *ambas poblaciones normales están idénticamente dispersas* con un nivel de significación $\alpha = 0.1$.

   Debemos realizar el contraste

$$\left.\begin{array}{lcl} H_0: & \sigma_1^2 & = & \sigma_2^2 \\ H_1: & \sigma_1^2 & \neq & \sigma_2^2 \end{array}\right\}$$

   Si H_0 es cierta, sabemos que $\frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F_{n_1-1,n_2-1}$ Hacemos algunos cálculos:

$$n_1 = 8 \qquad n_2 = 11$$

$$\bar{x} = \frac{12}{8} = 1.5 \quad \bar{y} = \frac{22}{11} = 2$$

$$s_1^2 = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1} = \frac{46 - (8)(1.5)^2}{7} = 4$$

$$s_2^2 = \frac{\sum y_i^2 - n\bar{y}^2}{n-1} = \frac{80 - (11)(2)^2}{10} = 3.597$$

   Tenemos

$$\hat{d} = \frac{4}{3.597} = 1.11$$

   Buscando en las tablas

$$\left\{\begin{array}{lclclcl} F_{7,10,0.05} & = & 3.14 \\ F_{7,10,0.95} & = & (F_{10,7,0.05})^{-1} & = & (3.64)^{-1} & = & 0.2747 \end{array}\right.$$

   Como $0.2747 \leq \hat{d} \leq 3.14$ no rechazamos H_0 al nivel de significación del 10%.